Schur-Weyl duality の証明

沙川 貴大

東京大学大学院 工学系研究科 物理工学専攻

December 26, 2017

量子情報理論で重要な役割を果たす Schur-Weyl duality を，表現論の知識を仮定せず self-contained に証明する[1]．

1 定理の主張

$\mathcal{V}$ を有限次元の複素線形空間として，$\mathcal{V}^{\otimes n}$ を考える（$n = 2, 3, \cdots$）．n 次の対称群 S_n の表現 W を，$\pi \in S_n$ に対して

$$W_\pi v_1 \otimes \cdots \otimes v_n := v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(n)}, \quad v_i \in \mathcal{V} \tag{1}$$

と定義する．

$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ への線形写像全体を $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ とおく．また $\mathrm{U}(\mathcal{V}) \subset \mathrm{End}(\mathcal{V})$ をユニタリ変換全体のなす群とする．なお，$\mathrm{End}(\mathcal{V}^{\otimes n}) = \mathrm{End}(\mathcal{V})^{\otimes n}$ に注意.

量子情報理論でよく用いられる形での Schur-Weyl duality は以下の通りである．

Schur-Weyl duality. すべての $X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})$ について $X^{\otimes n} \in \mathrm{U}(\mathcal{V}^{\otimes n})$ と可換な $\mathrm{End}(\mathcal{V}^{\otimes n})$ の元は，W_π（$\pi \in S_n$）の線形結合に限られる.（逆に任意の W_π が $X^{\otimes n} \in \mathrm{U}(\mathcal{V}^{\otimes n})$ と可換なのは自明.）

応用例として Haar 測度の計算を挙げよう．μ を $\mathrm{U}(\mathcal{V})$ の Haar 測度とする．$X \in \mathrm{End}(\mathcal{V}^{\otimes n})$ に対して，積分 $\mathbb{E}[X] := \int \mu(dU) U^{\otimes n} X (U^\dagger)^{\otimes n}$ を考える[2]．任意の $V \in \mathrm{U}(\mathcal{V})$ に対して

$$V^{\otimes n} \mathbb{E}[X] (V^\dagger)^{\otimes n} = \int \mu(d(V^\dagger U'))(U')^{\otimes n} X (U'^\dagger)^{\otimes n} = \mathbb{E}[X] \tag{2}$$

が成り立つ．ここで $U' := VU$ であり，Haar 測度の不変性 $\mu(d(V^\dagger U')) = \mu(dU')$ を使った．したがって $\mathbb{E}[X]$ は任意の $V^{\otimes n}$ と可換なので，W_π の線形結合で書ける．

2 Bicommutant theorem

Schur-Weyl duality の証明のもっとも非自明な部分は，von Neumann の bicommutant theorem (double centralizer theorem) である．これは数学ではしばしば無限次元の場合について述べられるが，ここで必要なのは以下に述べる有限次元の場合だけであり，初等的に証明できる．

[1] 本稿は [1, 2] などを参考にして書いた．これらに含まれている誤りは本稿では修正されている（はずである）．また，[3] も参考にした．

[2] この形の積分は，Haar ランダムなハミルトニアンについてのダイナミクスを計算するときにも現れるので，統計力学においても重要である．

$\mathrm{End}(\mathcal{V})$ の部分代数 $\mathcal{G}$ を考える[3].

定義. $\mathcal{G}$ の commutant を

$$\mathcal{G}' := \{Y \in \mathrm{End}(\mathcal{V}) \mid \forall X \in \mathcal{G}, XY = YX\} \tag{3}$$

と定義する.

定理 0 (bicommutant theorem). $\mathcal{G}$ が単位元 $I \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ を含み，さらに随伴について閉じている（つまり $\forall X \in \mathcal{G}$ に対して $X^\dagger \in \mathcal{G}$）と仮定する．このとき，$\mathcal{G}'' = \mathcal{G}$.

証明. 定義より明らかに $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}''$．よって示すべきは $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}''$ である[4].

（ステップ 1.） 任意の $v \in \mathcal{V}$ を固定する．$\mathcal{G}v := \{Xv \in \mathcal{V} \mid X \in \mathcal{G}\}$ とおくと，これは $\mathcal{V}$ の部分空間である（なお，$I \in \mathcal{G}$ より $v \in \mathcal{G}v$）．また，明らかに $\mathcal{G}$ の作用に対して不変，すなわち $\mathcal{G}(\mathcal{G}v) = \mathcal{G}v$.

$\mathcal{V} = \mathcal{G}v \oplus (\mathcal{G}v)^\perp$ と直交分解する．すなわち，$w' \in (\mathcal{G}v)^\perp$ ならば，すべての $w \in \mathcal{G}v$ に対して $(w', w) = 0$ である．任意の $X \in \mathcal{G}$ に対して $(Xw', w) = (w', X^\dagger w) = 0$（最後の等号で $\mathcal{G}$ が随伴について閉じていることを使った）．したがって $(\mathcal{G}v)^\perp$ も $\mathcal{G}$ の作用に対して不変である.

$\mathcal{G}v$ への射影演算子を P とする．任意の $X \in \mathcal{G}$ を考える．$\forall w \in \mathcal{G}v$ に対して $PXw = Xw = XPw$．また $\forall w' \in (\mathcal{G}v)^\perp$ に対して $PXw' = 0 = XPw'$．ここで $\mathcal{V} = \mathcal{G}v \oplus (\mathcal{G}v)^\perp$ なので，$\forall w \in \mathcal{V}$ に対して $PXw = XPw$ が成り立つ．したがって $PX = XP$，すなわち $P \in \mathcal{G}'$.

さて，$X'' \in \mathcal{G}''$ とする．$X''v = X''Pv = PX''v$ が成り立つ[5]．したがって（最右辺は射影 P がかかっているので）$X''v \in \mathcal{G}v$．以上より $\mathcal{G}v \supset \mathcal{G}''v$．したがって $\mathcal{G}v = \mathcal{G}''v$.

（ステップ 2.） $\mathcal{V}$ の n 個の直和を考える．$v_1 \oplus \cdots \oplus v_n \in \mathcal{V} \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}$ への $X \in \mathcal{G}$ の作用を $X(v_1) \oplus \cdots \oplus X(v_n)$ で定義する（すなわち $\mathcal{G} \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}$ という直和表現を考える）．これを $\mathcal{G}$ を成分とする $n \times n$ 行列とみなすと，対角行列 $\mathrm{diag}(X, \cdots, X)$ に他ならない．$\mathcal{G}$ を成分とする $n \times n$ 行列のうち，上記 $\mathcal{G}$ の作用すべてと交換するものは，$\mathcal{G}'$ を成分とする $n \times n$ 行列である．さらにそのすべてと交換するものは，$\mathcal{G}''$ を成分とする $n \times n$ の対角行列である．以上により，$(\mathcal{G} \oplus \cdots \oplus \mathcal{G})'' = \mathcal{G}'' \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}''$ が言えた.

したがって，ステップ 1 をいま考えている表現 $\mathcal{G} \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}$ に適用することで，任意の $v_1 \oplus \cdots \oplus v_n$ に対して

$$(\mathcal{G} \oplus \cdots \oplus \mathcal{G})(v_1 \oplus \cdots \oplus v_n) = (\mathcal{G}'' \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}'')(v_1 \oplus \cdots \oplus v_n) \tag{4}$$

となることが分かる．すなわち，任意の有限個の組 $(v_1, \cdots, v_n)$ と任意の $X \in \mathcal{G}$ に対して，ある $X'' \in \mathcal{G}''$ があって，$Xv_i = X''v_i$（$i = 1, \cdots, n$）が成り立つ（ここで $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}''$ を入れ替えたものも成り立つ）．$\mathcal{V}$ は有限次元だったので，これは $\mathcal{G} = \mathcal{G}''$ を意味する．□

3　証明の主要部分

Schur-Weyl duality の証明に戻ろう．$\mathcal{M}$ を $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ の部分代数とする．$\mathcal{M}^{\otimes n}$ のうち，S_n の作用で不変な部分代数を

$$\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} := \{X \in \mathcal{M}^{\otimes n} \mid \forall \pi \in S_n, W_\pi X W_\pi^{-1} = X\} \tag{5}$$

[3]和と積とスカラー倍で閉じたものを代数 (algebra) あるいは多元環と呼ぶ．すなわち線形空間に積が定義されて環になっているもの.

[4]以下の証明は [1] による.

[5]左の等式は $v \in \mathcal{G}v$ より，右の等式は $P \in \mathcal{G}'$ より.

とおく．また

$$\Pi := \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n} W_\pi \tag{6}$$

を定義する．

補題 1. $\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} = \Pi\mathcal{M}^{\otimes n}\Pi^{-1}$ が成り立つ．
証明. $\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} \subset \Pi\mathcal{M}^{\otimes n}\Pi^{-1}$ は定義より自明．また，$\forall\pi \in S_n, W_\pi\Pi = \Pi$ なので $\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} \supset \Pi\mathcal{M}^{\otimes n}\Pi^{-1}$ も明らか．□

補題 2. $\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} = \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathcal{M}\}$ が成り立つ[6]．
証明. $\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} \supset \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathcal{M}\}$ は自明．$\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} \subset \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathcal{M}\}$ を示す．
　$\mathcal{M}$ の（$\mathbb{C}$ 上の線形空間としての）基底を $\{X_i\}_{i=1}^d$ とする．このとき $X \in \mathcal{M}$ は $X = \sum_i x_i X_i$（$x_i \in \mathbb{C}$）と展開できるので，

$$X^{\otimes n} = \sum_{i_1,\cdots,i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n} X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_n}. \tag{7}$$

$X^{\otimes n}$ は Π で不変なので，

$$\begin{aligned} X^{\otimes n} &= \sum_{i_1,\cdots,i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Pi X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_n}\Pi^{-1} \\ &= \sum_{m_i;\sum_i m_i = n}\binom{n}{m_1,\cdots,m_d}\prod_i x_i^{m_i}X_i^{m_i}. \end{aligned} \tag{8}$$

ただし $\prod_i x_i^{m_i}X_i^{m_i}$ は，X_i を m_i 回含むテンソル積を対称化したものである．$\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathcal{M}\}$ は線形空間で，(8) は任意の $\{x_i\}$ に対して成り立つので，(8) の二行目を $\{x_i\}$ について任意の回数偏微分したものもまた $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathcal{M}\}$ に含まれる．したがって $\Pi X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_n}\Pi^{-1}$ はすべて $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathcal{M}\}$ に含まれる．ここで補題 1 より，$\{\Pi X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_n}\Pi^{-1}\}$ は $\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}}$ の基底に他ならない．したがって $\mathcal{M}^{\otimes n}_{\mathrm{sym}} \subset \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathcal{M}\}$ が言えた．□

　さて，$\{W_\pi\}_{\pi\in S_n}$ が生成する代数を $\mathcal{S}$ とすると，$\mathcal{S}$ は W_π の線形結合の全体であり，定義より $\mathrm{End}(\mathcal{V}^{\otimes n})_{\mathrm{sym}} = \mathcal{S}'$ が成り立つ．したがって，補題 2 で $\mathcal{M} = \mathrm{End}(\mathcal{V})$ とおくと以下が得られる．

補題 3. $\mathcal{S}' = \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{End}(\mathcal{V})\}$ が成り立つ．

　ここで定理 0 (bicommutant theorem) を用いれば，ただちに以下の形の Schur-Weyl duality が得られる（$\mathcal{G} = \mathcal{S}$ とおけば良い）．

定理 1 (Schur-Weyl duality). $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{End}(\mathcal{V})\}' = \mathcal{S}$ が成り立つ．

　ここから冒頭に述べたユニタリ群 $\mathrm{U}(\mathcal{V})$ の場合に進むには，もう少し議論が必要である．まず準備として，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ への同型写像全体のなす一般線形群 $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ を考える．

補題 4. $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})\} = \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{End}(\mathcal{V})\}$ が成り立つ．
証明. $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ は $\mathrm{End}(\mathcal{V})$ で稠密なので，$\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})\}$ の閉包は $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in$

[6] ここで右辺は $\mathbb{C}$ 上の線形空間として考えている．

$\mathrm{End}(\mathcal{V})\}$ と一致する．然るに $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})\}$ は（線形空間なので）閉集合なので，その閉包は自分自身である．□

補題 4 と定理 1 より，一般線形群についての Schur-Weyl duality を得る．

定理 2 (Schur-Weyl duality). $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})\}' = \mathcal{S}$ が成り立つ．

最後にユニタリ群 $\mathrm{U}(\mathcal{V})$ を考える．

補題 5. $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\} = \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})\}$ が成り立つ．

証明. $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\} \subset \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})\}$ は自明なので，$\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\} \supset \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})\}$ を示す．

任意の $x \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ に対して[7]，$x_n \in \mathrm{End}(\mathcal{V}^{\otimes n})$ を

$$x_n v_1 \otimes \cdots \otimes v_n := \sum_{j=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes x v_j \otimes \cdots \otimes v_n \tag{9}$$

で定義する．x は自己共役な y, z を用いて $x = y + iz$ と書ける．(9) と同様に y_n, z_n を定義すれば $x_n = y_n + iz_n$ である．また，任意の自己共役な $y \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$U(t) := \exp(ity_n) \in \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\}$ である．$\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\}$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間であり，t は任意なので，

$$y_n = -i \frac{d}{dt} U(t)\Big|_{t=0} \in \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\} \tag{10}$$

が成り立つ．z_n も同様．よって $x_n \in \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\}$ である．

さて任意の $G \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ は，ある $x \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ を用いて $G = \exp(ix)$ と書ける．したがって $G^{\otimes n} = \exp(ix_n)$ であるが，$x_n \in \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\}$ だったので $G^{\otimes n} \in \mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\}$ が言える．□

補題 5 と定理 2 より，ユニタリ群についての Schur-Weyl duality を得る．これは本稿の冒頭で述べたものに他ならない．

定理 3 (Schur-Weyl duality). $\mathrm{span}\{X^{\otimes n}, X \in \mathrm{U}(\mathcal{V})\}' = \mathcal{S}$ が成り立つ．

References

[1] https://math.berkeley.edu/~reb/courses/261/51.pdf

[2] https://qchu.wordpress.com/2012/11/13/four-flavors-of-schur-weyl-duality/

[3] https://cs.uwaterloo.ca/~watrous/TQI/TQI.7.pdf

[7] x が小文字なのは Lie 環 $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ の元であるという気持ちを表している．