# K理論とバンド理論についてのメモ

沙川 貴大

東京大学大学院 工学系研究科 物理工学専攻

April 3, 2018

**Abstract**

K 理論と分類空間のホモトピーについて，物理屋の立場（？）からまとめる[1]．とくに K 群の意味をバンド理論の立場から解釈して，数学の定理と物理の公式がどう対応しているかを示す．トポロジカル絶縁体・超伝導体の周期表についても簡単に議論する．

## Contents



K 理論（K-theory）はトポロジーの分野で古くから知られた道具であるが，トポロジカル絶縁体・超伝導体との関連が見出されて以来，物性物理の分野でも注目を集めている．本稿では物性物理，とくにバンド理論に関係する範囲内で，K 理論の基本的な概念について簡単にまとめる．

本稿の構成は以下の通りである．まず 1 節から 3 節で，K 群の定義とその基本的な性質について述べる．4 節と 5 節では分類空間のホモトピーについて述べ,（物理で言う）ハミルトニアンのホモトピーとの対応を議論する．6 節で Bott 周期性とカイラル対称性の関係を述べる．7 節でトポロジカル絶縁体・超伝導体の周期表について述べる．8 節では K 群と Chern 数の関係を議論する．証明はほとんど書かないが，何が定義で何が定理かは（6 節以外では）明確になるよう努力した．

[1]筆者の専門は統計物理・量子情報で，トポロジーも物性物理も専門ではありません．本稿は非専門家が趣味で書いたものです．苦情や間違いのご指摘などがあればお知らせいただけると幸いです．

本稿では一貫して，$X$ を $d\ (\geq 0)$ 次元のコンパクトな多様体として[2]，その上のベクトル束 $\pi : E \to X$ を考える（しばしばこれを略して単に $E$ と書く）．ファイバーの次元をベクトル束のランクと呼ぶ．物理的には，$X$ は Brillouin zone (BZ)，$E$ は占有バンドの波動関数の集合であり，ランクは占有バンドの数である．

また簡単のため，すべて $\mathbb{C}$ 上で考える．物理的には，ハミルトニアンの対称性クラスとして複素 Altland-Zirnbauer (AZ) クラス（すなわちクラス A と AIII）だけを考える．

# 1 K 群の定義

最初に K 群の定義を述べる[3]．基本的なアイデアは「ベクトル束の引き算」を考えることである．

まず，$X$ 上のベクトル束（を位相同型で同値類をとった）全体の集合は，直和 $\oplus$ を加法として可換モノイドになる．ここから以下のようにして Abel 群を構成しよう（これを Grothendieck 構成という）．

ベクトル束の組 $(E, F)$ に対して，以下の同値関係を入れる[4]：

$$(E, F) \sim (E', F') \quad \Leftrightarrow \quad \exists G,\ E \oplus F' \oplus G \simeq F \oplus E' \oplus G. \tag{1}$$

$(E, F)$ の同値類を $[(E, F)]$ と書く．この同値類の集合は自然に Abel 群になる．実際，加法を $[(E_1, F_1)] + [(E_2, F_2)] := [(E_1 \oplus E_2, F_1 \oplus F_2)]$ とすると well-defined であり，単位元は $[(E, E)]$，逆元は $-[(E, F)] = [(F, E)]$ である．そこで $[(E, F)]$ のことを $[E] - [F]$ と書くことにする．

**定義 1.** $X$ 上のベクトル束から上記のように構成される Abel 群を $X$ の K 群と呼び，$\mathrm{K}(X)$ と書く．

上記の定義は自然数から整数を構成する方法とほとんど同じである．ただし，(1) で $G$ が必要な点だけが異なる．これは以下のような事情による．自然数の場合は「$n + m = n' + m$ ならば $n = n'$」が成り立つ．しかしベクトル束の場合はこれが保証されない．したがって引き算をうまく定義するためには

$$E \sim F \quad \Leftrightarrow \quad \exists G,\ E \oplus G \simeq F \oplus G \tag{2}$$

という同値関係を入れる必要がある．これをベクトル束の **stable equivalence** と呼ぶ．この同値関係と，自然数から整数を構成するときと同じ引き算の構成から，(1) の定義が得られる．すなわち，K 群の元を $[E] - [F]$ と書いたときの $[E]$ は，$E$ の stable equivalence の同値類である．

なお後述の定理 7 から，任意の $G$ に対して，ある $\bar{G}$ があって $G \oplus \bar{G} \simeq I^m$（ランク $m$ の自明束）となる．したがって stable equivalence の定義 (2) は

$$E \sim F \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N},\ E \oplus I^m \simeq F \oplus I^m \tag{3}$$

と等価である[5]．

[2] あるいは，十分に性質の良い位相空間であれば良い．なお，連結と弧状連結の違いといったことは本稿では気にしない（多様体では両者は同じ）．

[3] K 理論については [1–7] を（それぞれ非常に部分的に）参考にした．

[4] 本稿では，位相同型にのみ “$\simeq$” を使い，集合や群の同型は単に “$=$” で書く．とくに深い理由はない．

[5] Stable equivalence を以下のように定義する流儀もある [3]：ベクトル束 $E$ と $F$ が stably equivalent であるとは，ある $n, m$ があって $E \oplus I^n \simeq F \oplus I^m$ が成り立つことを言う．この定義ではランクの異なるベクトル束も stably equivalent になりうる．しかし本稿の定義と本質的な違いはない．

Stably equivalent だが位相同型でない例を挙げよう [3]．ここだけ実ベクトル束を考える．$S^2$ の接バンドル $TS^2$ は自明ではない．しかしそれと法バンドル[6]との直和は，定義より自明束 $S^2 \times \mathbb{R}^3$ と同型になる．したがって $TS^2 \not\simeq S^2 \times \mathbb{R}^2$ だが $[TS^2] = [S^2 \times \mathbb{R}^2]$ である．

もっとも簡単な K 群は，1 点 pt 上の K 群である．1 点上のベクトル束はベクトル空間そのものであり，したがって明らかに $\mathrm{K}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$ である．また，K 群はホモトピー不変であることが知られているので[7]，可縮な空間の K 群は 1 点と同じ $\mathbb{Z}$ で与えられる[8]．

ここでいくつか関連する概念を定義しておく．まず簡約 K 群を定義する[9]．

**定義 2.** $i : \mathrm{pt} \hookrightarrow \mathrm{X}$ を，1 点 pt から $X$ への包含写像とする．そこから（ベクトル束の引き戻しによって）誘導される写像 $i^* : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(\mathrm{pt})$ の kernel を，$X$ の簡約 K 群と呼び，$\tilde{\mathrm{K}}(X)$ と書く．

この定義および $\mathrm{K}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$ より，完全系列

$$0 \to \tilde{\mathrm{K}}(X) \to \mathrm{K}(X) \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z} \to 0 \tag{4}$$

が存在する．これは split するので[10]，

$$\mathrm{K}(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{\mathrm{K}}(X) \tag{5}$$

が分かる．1 点の簡約 K 群は $\tilde{\mathrm{K}}(\mathrm{pt}) = 0$ である．

次に，$\tilde{\mathrm{K}}(X)$ とは似て非なる $\mathrm{K}'(X)$ を定義する．まず $X$ が連結の場合を考えよう．このときベクトル束のランクは一意なので，ベクトル束 $E$ にそのランク $\mathrm{rk}(E) \in \mathbb{N}$ を対応させるランク写像 rk を定義できる．$\mathrm{rk} : K(X) \to \mathbb{Z}$ を $\mathrm{rk}([E]-[F]) := \mathrm{rk}(E) - \mathrm{rk}(F)$ と定義すると，ランク写像は K 群に拡張される．これを仮想ランクと呼ぶ[11]．$X$ が連結でない場合は，ランクは連結成分ごとに異なっていても良い．連結成分の数は 0 次のコホモロジー $H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ の数に等しいので，結局ランク写像は $\mathrm{rk} : \mathrm{K}(X) \to H^0(X, \mathbb{Z})$ と定義される．

**定義 3.** $\mathrm{K}'(X)$ をランク写像 rk の kernel と定義する．すなわち $\mathrm{K}'(X)$ は仮想ランクが 0 の部分 K 群である．

この定義から，完全系列

$$0 \to \mathrm{K}'(X) \to \mathrm{K}(X) \xrightarrow{\mathrm{rk}} H^0(X, \mathbb{Z}) \to 0 \tag{6}$$

が存在し，これは split するので[12]，

$$\mathrm{K}(X) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{K}'(X) \tag{7}$$

が成り立つ．とくに $X$ が連結の場合は $\mathrm{K}'(X) = \tilde{\mathrm{K}}(X)$ である．一般に，$i(\mathrm{pt}) \in X$ を $X$ の基点とすると，$\tilde{\mathrm{K}}(X)$ は基点を含む連結成分の仮想ランクが 0 であるような部分群である．

ここで便利な定理をひとつ示しておく．簡単のため $X$ は連結とする．

---

[6] $S^2 \times \mathbb{R}^3$ のうち接バンドルと直交している部分と定義する．これは自明束 $S^2 \times \mathbb{R}$ と同型である．

[7] これは一般コホモロジーの公理の一つである．

[8] 位相空間 $X$ が可縮とは $X$ が 1 点とホモトピー同値であること，弱可縮とは全ての次数のホモトピー群が自明になることである．

[9] 簡約コホモロジーと同じ形の定義である．

[10] $p : X \to \mathrm{pt}$ を 1 点への定値写像とすると，ここから誘導される $p^*$ は $i^* \circ p^* = \mathrm{id}$ を満たす．

[11] Virtual rank．ただし virtual dimension と呼ぶ方が多いようである．ざっくり言うと，K 群とは「ベクトル束のマイナス」を考えるものなので，そのランク（次元）もマイナスになりうる，ということである．

[12] $\mathrm{rk} \circ r = \mathrm{id}$ なる $r : H^0(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{K}(X)$ が存在する．

**定理 1.** $\mathrm{K}(X)$ の任意の元は $[E]-[I^m]$ の形に書ける．とくに $\mathrm{K}'(X)$ の任意の元は $[E_k]-[I^k]$ の形に書ける（$E_k$ はランク $k$）．

**Proof.** 任意の $[E_k]-[F_l]\in\mathrm{K}(X)$ をとる（$E_k$ はランク $k$，$F_l$ はランク $l$）．後述の定理 7 から，任意の $F_l$ に対してある $\bar{F}_{m-l}$ があって，$F_l\oplus\bar{F}_{m-l}\simeq I^m$ となる．したがって $[E_k]-[F_l]=[E_k\oplus\bar{F}_{m-l}]-[I^m]$ となるので，$E:=E_k\oplus\bar{F}_{m-l}$ とおけば良い．$\mathrm{K}'(X)$ についてはその仮想ランクが 0 であることから分かる．□

この定理を使うと，(7) の分解は

$$[E_k]-[I^l]\in\mathrm{K}(X)\ \mapsto\ (k-l,[E_k]-[I^k])\in\mathbb{Z}\oplus\mathrm{K}'(X) \tag{8}$$

という同型対応で明示的に与えられる．

# 2　K 群と stable range

さて，K 群がどのような情報を持っているかを考えよう．まず $X$ を連結とする．$\mathrm{Vect}_k(X)$ を，$X$ 上のランク $k$ のベクトル束の（位相同型で同値類をとった）集合とする．ランク 1 の自明束を付け加える写像 $E_k\in\mathrm{Vect}_k(X)\mapsto E_k\oplus I^1\in\mathrm{Vect}_{k+1}(X)$ によって，包含写像の列

$$\mathrm{Vect}_0(X)\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow\mathrm{Vect}_k(X)\hookrightarrow\mathrm{Vect}_{k+1}(X)\hookrightarrow\cdots \tag{9}$$

を定義し，この帰納極限を $\mathrm{Vect}_\infty(X)$ と書くことにする[13]．明らかに $\mathrm{Vect}_\infty(X)$ は直和 $\oplus$ によってモノイドになる．実は，$\mathrm{Vect}_\infty(X)$ と $\mathrm{K}'(X)$ には全単射が存在し，したがって $\mathrm{Vect}_\infty(X)$ は自然に Abel 群になる．

**定理 2.** $X$ を連結とする．$E_k\in\mathrm{Vect}_k(X)$ に $[E_k]-[I^k]\in\mathrm{K}'(X)$ を対応させる写像によって，写像 $\mathrm{Vect}_\infty(X)\to\mathrm{K}'(X)$ を定義する．これは全単射である．したがって自然に Abel 群として

$$\mathrm{K}'(X)=\mathrm{Vect}_\infty(X) \tag{10}$$

が成り立つ[14]．

**Proof.** まず単射であることを示す．$[E_k]-[I^k]=[F_k]-[I^k]\in\mathrm{K}'(X)$ とすると，(1) と (3) より，ある $l$ があって $E_k\oplus I^{k+l}\simeq F_k\oplus I^{k+l}$．$\mathrm{Vect}_\infty(X)$ を定義したときの包含写像を思い出すと，これは $\mathrm{Vect}_\infty(X)$ の元として $E_k=F_k$ であることを意味している[15]．次に全射であることは，定理 1 より $\mathrm{K}'(X)$ の任意の元が $[E_k]-[I^k]$ の形に書けることによる．□

$X$ が連結でない場合も，連結成分ごとに同様の議論をすることで (10) が成り立つことは明らかであろう．したがって一般に以下が成り立つ．

**定理 3.** 連結でない $X$ についても (10) が成り立つ．あるいは同じことだが

$$\mathrm{K}(X)=H^0(X,\mathbb{Z})\oplus\mathrm{Vect}_\infty(X). \tag{11}$$

---

[13] あらゆるランクのベクトル束の（位相同型で同値類をとった）集合にモノイドの構造を入れたものを $\mathrm{Vect}(X)$ と書く．$\mathrm{Vect}(X)$ は全てのランクの disjoint union なので，$\mathrm{Vect}_\infty(X)$ とは異なる．

[14] [1] の Lemma 2.1.1，あるいは [2] の 1.31. Proposition.

[15] 要するに，$\mathrm{Vect}_\infty(X)$ の定義が stable equivalence をとる形になっている．

以上では$k \to \infty$の極限を考えたが，実は定理3は十分大きいが有限の$k$で成立する．まず，以下の定理が成り立つ[16].

**定理 4.** $k_0 := [(d+1)/2]$とする（この$[\cdots]$は整数部分を表すGauss記号）．ランク$k$ $(> k_0)$の任意のベクトル束$E_k$に対して，ランク$k_0$のあるベクトル束$F_{k_0}$があって，$E_k \simeq F_{k_0} \oplus I^{k-k_0}$となる．この範囲$k > k_0$を**stable range**と呼ぶ[17].

この定理より，K群の要素として$[E_k] - [I^k] = [F_{k_0}] - [I^{k_0}] \in \mathrm{K}'(X)$が成り立つ．すなわちランクが十分大きくなると，K群の意味で新しいベクトル束は存在しなくなる．さらに以下が成り立つ[18].

**定理 5.** Stable range $k > k_0$において，ランク$k$のベクトル束が位相同型であることの必要十分条件は，両者がstably equivalentなことである．

小さな$k$に対しては，この定理はもちろん成り立たない（たとえば上記の$[TS^2] = [S^2 \times \mathbb{R}^2]$はこれが成り立たない例である[19]）．この定理により，定理3は次のような形で述べられる．

**定理 6.** Stable range $k > k_0$において，

$$\mathrm{K}'(X) = \mathrm{Vect}_k(X) \tag{12}$$

あるいは

$$\mathrm{K}(X) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Vect}_k(X). \tag{13}$$

(12)から分かるように，$\mathrm{K}'(X)$はstable range内に固定したランク$k$のベクトル束の情報を持っている．$\mathrm{K}'(X)$は定義から仮想ランクが0なのでそもそもランクの増減の情報を持ちえず，そのかわりに$X$に固有のトポロジーの情報を持っていると言える[20]．ランクの増減に関する情報は$\mathrm{K}(X)$の$H^0(X, \mathbb{Z})$の部分に入っている（前節の(8)を参照）．

以上をまとめると，ランクが十分大きくなるとベクトル束の構造は単純になり，それを特徴づけるのがK理論であると言える．すなわち，**ランクの十分大きなベクトル束については，K群は位相同型と同じ情報をもつ**．しかし小さな$k$に対しては，K群は位相同型より真に弱い分類しか与えない．

K群の意味をより深く理解するには分類空間のホモトピーが重要であり，4節と5節で議論する．

# 3 高次のK群

高次のK群を定義する．これによってK理論は一般コホモロジー理論となる [8][21].

---

[16] [4] の Chaper 9, 1.2 Theorem.

[17] $X$が連結でない場合は，すべての連結成分のランクが$k > k_0$を満たすとする．

[18] [4] の Chaper 9, 1.5 Theorem.

[19] 実ベクトル束のstable rangeは$k > d$なので，この例の$k = d = 2$はギリギリその外にある．

[20] 8節の後半の議論も参照.

[21] さらに相対K群も定義する必要があるが，本稿では立ち入らない．ここでコホモロジーとは，空間のペアの圏から加群の圏への反変関手であって,（ある自然変換についての）完全系列公理，ホモトピー公理，切除公理，次元公理を満たすものを言う．単体分割可能な位相空間の圏においては，コホモロジーは一意に定まる．ここから次元公理を除いたものが一般コホモロジーであり，K理論はその例である．後述のMayer-Vietoris完全系列が成り立つことは，K理論が一般コホモロジー理論であることの表れである．

$n \geq 0$とする．ここでは，まず高次の簡約K群を

$$\tilde{\mathrm{K}}^{-n}(X) := \tilde{\mathrm{K}}(\Sigma^n X) \tag{14}$$

と定義する．ここで$\Sigma$はreduced suspensionを表し，$X$の基点を$x_0 \in X$とすると

$$\Sigma X := (X \times [0,1])/(X \times \{0\})/(X \times \{1\})/(\{x_0\} \times [0,1]) \tag{15}$$

と定義される．たとえば$\Sigma S^d \simeq S^{d+1}$である（$S^0$を2点集合とすると，これは$d=0$でも成り立つ）．一方で，たとえばトーラスの場合は$\Sigma T^d \not\simeq T^{d+1}$である．また，1点は何度reduced suspensionをとっても1点のままなので，$\tilde{\mathrm{K}}^{-n}(\mathrm{pt}) = \tilde{\mathrm{K}}(\mathrm{pt}) = 0$となる．

なお，簡約していない高次のK群は$\mathrm{K}^{-n}(X) := \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(X \amalg \mathrm{pt})$と定義できる[22]．ここで$\amalg$はdisjoint unionを表す．$\mathrm{K}^{-n}(X) = \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(X) \oplus \mathrm{K}^{-n}(\mathrm{pt})$であり，$n$が偶数のときは$\mathrm{K}^{-n}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$，$n$が奇数のときは$\mathrm{K}^{-n}(\mathrm{pt}) = 0$が成り立つ．

Mayer-Vietoris完全系列について簡単に述べておく．$X_1, X_2$を$X = X_1 \cup X_2$を満たす閉空間とする．$X_1 \cap X_2 \neq \phi$と仮定すると[23]，簡約K群についての以下の完全系列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots \to &\tilde{\mathrm{K}}^{-n-1}(X_1) \oplus \tilde{\mathrm{K}}^{-n-1}(X_2) \to \tilde{\mathrm{K}}^{-n-1}(X_1 \cap X_2) \\ &\to \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(X) \to \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(X_1) \oplus \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(X_2) \to \cdots . \end{aligned} \tag{16}$$

たとえば$X = S^d$に対して，$X_1 = S^d_+$，$X_2 = S^d_-$（半球面）を，$S^d_+ \cap S^d_- \simeq S^{d-1}$となるように取る．ここで$S^d_\pm$は可縮なので，$n \geq 0$に対して$\tilde{\mathrm{K}}^{-n}(S^d_\pm) = 0$となる．したがって

$$0 \to \tilde{\mathrm{K}}^{-n-1}(S^{d-1}) \to \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(S^d) \to 0 \tag{17}$$

は完全系列となり，$\tilde{\mathrm{K}}^{-n-1}(S^{d-1}) = \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(S^d)$を得る．これは高次のK群の定義(14)そのものである[24]．

この議論は，球面の（コ）ホモロジー群を求める例題と全く同じである．しかし得られるK群はコホモロジー群とは異なっている（7節の表1を参照）．その理由は，1点に対するコホモロジー群とK群が異なっていることである[25]．これはK理論が通常のコホモロジー理論ではなく一般コホモロジー理論である（次元公理を満たさない）ことを意味している [8].

# 4 分類空間

いったん少し話題を変えて，分類空間（classifying space）とその物理的意味についてまとめる[26]．本節では$X$を連結とする．

Grassmann多様体を

$$\mathrm{Gr}(k,m) := \mathrm{U}(m)/[\mathrm{U}(m-k) \times \mathrm{U}(k)] \tag{18}$$

---

[22] これは$n=0$でも成り立つことに注意．なお，[3]では$\mathrm{K}^{-n}(X) := \mathrm{K}(\Sigma^n X)$と書いているが，これは間違いである（$X = \mathrm{pt}$の場合からして正しくない）．

[23] 簡約K群を定義する際の基点は$X_1 \cap X_2$に含まれるようにする．基点についての完全系列は$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$であり，簡約していないMayer-Vietoris完全系列の偶数の$n$のところからこれが分離する．

[24] 全く同じ議論が一般に$X$と$\Sigma X$で成立する．

[25] $H^0(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$，$H^n(\mathrm{pt}) = 0$（$n \geq 1$）である（次元公理）．なお2点$S^0$に対しては$\tilde{H}^0(S^0) = \mathbb{Z}$，$\tilde{H}^n(S^0) = 0$（$n \geq 1$）．

[26] 主に[9]の11.2.4に従う．証明などの詳細は，たとえば[1,2,10]にある．

とする（$\mathrm{U}(k)$ はユニタリ群）．これは物理的には，占有バンドが $k$，非占有バンドが $(m-k)$ で，ギャップのある flat 化されたハミルトニアンの空間である [11–14]．すなわち，対角化すると

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{I}_{m-k} & 0 \\ 0 & -\hat{I}_k \end{pmatrix} \tag{19}$$

の形になるハミルトニアンの空間である（$\hat{I}_k$ は $k \times k$ の単位行列）．これに関連して，以下の定理が知られている．

**定理 7.** ランク $k$ の任意のベクトル束 $\pi : E \to X$ に対して，ある $m\ (\geq k)$ とランク $m-k$ のベクトル束 $\bar{\pi} : \bar{E} \to X$ があって，$E \oplus \bar{E}$ が自明束 $X \times \mathbb{C}^m (=: I^m)$ と同型になる．

このとき，$x \in X$ を $E$ のファイバー $\pi^{-1}(x) \subset (\pi \oplus \bar{\pi})^{-1}(x)$ に写す写像 $f_E$ は，$X$ から $\mathrm{Gr}(k,m)$ への写像に他ならない[27]．これは物理的には，BZ からハミルトニアンへの写像 $f_E : x \mapsto \hat{H}(x)$ である．この写像のトポロジー（物理的に言えばハミルトニアン $\hat{H}(x)$ のトポロジー）が，ベクトル束 $E$ のトポロジー（占有バンドのトポロジー）と対応すると考えることは自然であろう．実際，以下の定理が成り立つ．

**定理 8.** $\mathrm{Gr}(k,m)$ 上のランク $k$ のベクトル束 $L(k,m)$ を，$\mathrm{Gr}(k,m)$ の各要素が自分自身（を同値類とする部分空間 $\simeq \mathbb{C}^k$）をファイバーとして持つものと定義する（これを標準的平面束と呼ぶ）．このとき，

$$E \simeq f_E^* L(k,m) \tag{20}$$

が成り立つ．ここで $f_E^*$ はベクトル束の引き戻しを意味する．

この定理を物理的に解釈すると「ハミルトニアンの占有バンドの部分空間は，占有バンドの波動関数の集合である」という（当たり前の）ことであろう．また，以下の定理が成り立つ．

**定理 9.** $f, g : X \to \mathrm{Gr}(k,m)$ に対して $f^* L(k,m) \simeq g^* L(k,m)$ となる必要十分条件は，$f, g$ がホモトピー同値であることである．

定理 8 と定理 9 から，ベクトル束の（位相同型としての）分類が，Grassmann 多様体のホモトピーで完全に決定されることが分かる（この意味で，$f_E$ を $E$ の分類写像と呼ぶ）．これは物理的には，**ハミルトニアンのホモトピーによって，波動関数のトポロジーが完全に決まる**ことを意味している．

以上では，$E$ に対して決まる（十分大きな）$m$ を考えていた．そこで $m \to \infty$ の極限を考えることにする．以下の自然な包含写像の帰納極限によって，$\mathrm{BU}(k) := \mathrm{Gr}(k,\infty)$ を定義する[28]：

$$\mathrm{Gr}(k,m) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(k,m+1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{Gr}(k,\infty). \tag{21}$$

この $\mathrm{BU}(k)$ を**分類空間**と呼ぶ．また，対応して得られるベクトル束 $p : L(k,\infty) \to \mathrm{Gr}(k,\infty)$ を普遍束と呼ぶ[29]．

定理 9 より，ランク $k$ のベクトル束の位相同型と，分類空間 $\mathrm{BU}(k)$ のホモトピーは，完全に対応することが分かる．すなわち以下の定理が成り立つ．

[27] $f_E$ が $E$ に依存することを強調するために添え字 $_E$ をつけた．

[28] 位相は「$U \subset \mathrm{Gr}(k,\infty)$ が開集合」を「任意の $m$ に対して $U \cap \mathrm{Gr}(k,m)$ が開集合」で定義する．

[29] 一般に位相群 G に対して，主 G 束 $p : \mathrm{EG} \to \mathrm{BG}$ で，EG が弱可縮なものを普遍 G 束と言い，EG を普遍空間，BG を分類空間と呼ぶ．任意の位相群 G に対して普遍 G 束は存在し，定理 8 と定理 9 に相当する性質を満たす [10]．なおここで位相群には（離散位相を入れた）離散群も含まれている．離散群 G の分類空間 BG のコホモロジーは，G の（代数的に定義された）群コホモロジーに一致する（群コホモロジーはボソン的な SPT の分類に用いられる [15]）．たとえば，離散群 $\mathbb{Z}$ の分類空間は $S^1$，普遍空間はその普遍被覆 $\mathbb{R}$ である [7]．

**定理 10.** $[X, \mathrm{BU}(k)]$ を $X$ から $\mathrm{BU}(k)$ への写像のホモトピー類の集合とする[30]．このとき，集合の同型として

$$\mathrm{Vect}_k(X) = [X, \mathrm{BU}(k)] \tag{22}$$

が成り立つ．

物理的には，(21) は非占有バンドを付け加えていく操作に対応している．このような操作をしても占有バンドのトポロジー的な性質が変わらないことは明らかに思える．しかし，もし非占有バンドを追加してトポロジーが変わる物質があれば，そのトポロジーはベクトル束の位相同型では記述できないことになる[31]．

このように，ベクトル束の位相同型は分類空間のホモトピーで完全に決定される．しかしこのホモトピーを計算する方法は一般には知られていない．一方で十分大きな $k$ を考えると，K 群を介してある程度の計算が可能になる．実際 2 節で見たように，K 群は $k \to \infty$ の極限，あるいは stable range における $k$ に対応している．

# 5　K 群と安定ホモトピー

K 群と分類空間のホモトピーの関係を考えよう．まず，分類空間 $\mathrm{BU}(k)$ の極限 $k \to \infty$ を考える．すなわち，以下の包含写像の帰納極限によって $\mathrm{BU}(\infty)$ を定義し[32]，これも分類空間と呼ぶ：

$$\mathrm{BU}(1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{BU}(k) \hookrightarrow \mathrm{BU}(k+1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{BU}(\infty). \tag{23}$$

このとき，定理 3 と定理 10 より，以下の定理が成り立つ[33]．すなわち，K 群は分類空間のホモトピー集合と一致する：

**定理 11.**

$$\mathrm{K}'(X) = [X, \mathrm{BU}(\infty)] \tag{24}$$

が成り立つ[34]．あるいは同じことだが，

$$\mathrm{K}(X) = [X, \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}(\infty)] \tag{25}$$

が成り立つ（$\mathbb{Z}$ には離散位相を入れる）．

なお，前節の議論を連結成分ごとに適用することで，定理 11 は $X$ が連結でない場合でも成り立つ．(24) から (25) を得るには，$H^0(X, \mathbb{Z}) = [X, \mathbb{Z}]$ に注意すれば良い．$X$ が連結のときは，(24) は

$$\tilde{\mathrm{K}}(X) = [X, \mathrm{BU}(\infty)] \tag{26}$$

となる．

また，定理 6 により，stable range $k > k_0$ において，$\mathrm{Vect}_k(X)$ は $k$ に依存しなくなる．定理 10 により，これは $k > k_0$ において $[X, \mathrm{BU}(k)]$ が $k$ に依存しなくなることを意味する．すなわち以下が成り立つ．

---

[30] ホモトピー集合 $[X, Y]$ は基点付ではないとする．

[31] Hopf insulator（$d = 3, m = 2, k = 1$）がそのような例になっている [16]．占有バンドと非占有バンドを合わせてトポロジーを考えているので，占有バンドだけのトポロジーでは記述できない．

[32] この包含写像は $\mathrm{Gr}(k, m) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(k+1, m+1)$ から誘導される．

[33] [1] の Proposition 2.1.10，あるいは [2] の 1.32. Proposition と 1.33. Theorem.

[34] ここで等号は，まず集合の同型を意味する．さらに，$\mathrm{K}'(\cdot)$ と $[\cdot, \mathrm{BU}(\infty)]$ を多様体の圏から集合の圏 **Set** への関手と見ると，(24) は関手の自然同型となる（ [2] の 1.32. Proposition，これは Brown の表現定理の一例である）．また，$\mathrm{Vect}_\infty(X)$ が自然に Abel 群になったのと同様に，この等式を通して $[X, \mathrm{BU}(\infty)]$ にも Abel 群の構造が入ると解釈できる．

**定理 12.** Stable range $k > k_0$ において，

$$\mathrm{K}'(X) = [X, \mathrm{BU}(k)], \tag{27}$$

あるいは同じことだが

$$\mathrm{K}(X) = [X, \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}(k)] \tag{28}$$

が成り立つ．

このような stable range $k > k_0$ におけるホモトピー集合を安定ホモトピーと呼び，しばしば $\lim_{k\to\infty}[X, \mathrm{BU}(k)]$ と書く．これは $[X, \mathrm{BU}(\infty)]$ と一致する．

以上の議論を物理的に解釈すると，極限 $k \to \infty$ あるいは stable equivalence は，**占有バンドに（トポロジカルに自明な）バンドを追加しても変わらない性質を見る**ということに対応する．Stable range の $k$ においては，$\mathrm{K}'(X)$ がバンドの波動関数の位相同型と同じ情報をもち，バンドのトポロジーの完全な分類を与える[35]．

一方，K 群の分解 (7) において $H^0(X, \mathbb{Z})$ の部分が仮想ランクに対応していたことを思い出すと，(28) の $\mathbb{Z}\times$ の部分（これが $H^0(X, \mathbb{Z})$ を与える）から「連結成分ごとの占有バンドの数」の情報が与えられると解釈できる[36]．とくに $X$ が連結の場合は $H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ であり，この $\mathbb{Z}$ が占有バンドの数を表すと解釈できる．残りの $\mathrm{K}'(X)$ が $X$ に固有のトポロジーの情報を与える（定理 6 の下および 8 節の後半の議論も参照）．

以上が，K 群をトポロジカル絶縁体・超伝導体の分類に用いることの（単に K 群は計算がある程度可能である，という以上の積極的な）物理的意味であると考えられる．

具体例として $X = S^d$ の場合を考えよう．まず $d \geq 1$ のとき，$[S^d, \mathrm{BU}(k)]$ はホモトピー群 $\pi_d(\mathrm{BU}(k))$ と同一視される[37]．Stable range においては定理 12 より $\pi_d(\mathrm{BU}(k))$ は $k$ に依存せず，さらに $\pi_d(\mathrm{BU}(k)) = \pi_{d-1}(\mathrm{U}(k))$ が成り立つことが知られている．Stable range における $\pi_{d-1}(\mathrm{U}(k))$ を，$\pi_{d-1}(\mathrm{U}(\infty))$ と書き，ユニタリ群の $(d-1)$ 次の安定ホモトピー群と呼ぶ[38]．この群は具体的に知られており，定理 11 と合わせると，$d \geq 1$ に対して以下が成り立つ[39]．

$$\tilde{\mathrm{K}}(S^d) = \pi_{d-1}(\mathrm{U}(\infty)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (d\text{: even}), \\ 0 & (d\text{: odd}). \end{cases} \tag{29}$$

この周期 2 の周期性を Bott 周期性と呼ぶ．

ここで $\pi_0$（$d = 1$ のとき）について注意しておく．一般に位相空間 $Y$ の 0 次ホモトピー集合 $\pi_0(Y)$ は，2 点集合 $S^0$ から $Y$ への基点付ホモトピーで定義される．したがって $\pi_0(Y)$ は 1 点からの行き先，すなわち $Y$ の連結成分の数を与える．なお，$\pi_0(Y)$ は一般には群にならない．いま $\mathrm{U}(k)$ は連結なので，$\pi_0(\mathrm{U}(k))$ は 1 点集合である．これを自明な群とみなして $\pi_0(\mathrm{U}(k)) = 0$ と書くことにする．この意味で (29) は $\pi_0$ も含めて成り立つ．

---

[35] 小さな $k$ については，K 群が完全な分類を与えない物理的な例も知られているらしい [7]．

[36] もちろん実際の占有バンドの数は 0 以上だが，Grothendieck 構成によって負の部分が生じている．$H^0(X, \mathbb{Z})$ の個々の要素（仮想ランクの値）に意味があるというよりも，加群 $H^0(X, \mathbb{Z})$ の構造が「独立な占有数が何個あるか」を表していると見るべきであろう．

[37] 記号 $[X, Y]$ は基点付でないホモトピー集合を表すのであったが，$\pi_d(Y)$（$d \geq 0$）は基点付だとする．$\mathrm{BU}(k)$（$k \geq 1$）は連結なので，$\pi_d(\mathrm{BU}(k))$ は基点の取り方によらない．一方，$\pi_0(\mathbb{Z} \times \mathrm{BU}(k))$ は，基点のない $[S^0, \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}(k)]$ とは異なる．

[38] $\mathrm{U}(\infty)$ については後で再び述べる．

[39] なお，$\tilde{\mathrm{K}}(S^d) = \pi_{d-1}(\mathrm{U}(k))$ であることは，以下のようにして（直観的には）容易に分かる [3]．$S^d$ を $S^d_+$ と $S^d_-$ に分割し，$S^d_+ \cap S^d_- \simeq S^{d-1}$ となるようにする．$S^d_\pm$ は可縮なので，その上のベクトル束は自明なものしかない．したがって $S^d_+ \cap S^d_- = S^{d-1}$ 上での変換だけで全体のベクトル束の構造が決まるが，この変換は $S^{d-1}$ から $\mathrm{U}(k)$ への写像，すなわち $\pi_{d-1}(\mathrm{U}(k))$ で決まる．ただしこの議論では $k$ が大きいことは使われていない．

$\tilde{\mathrm{K}}(S^0)$ については，$S^0$ が 2 点集合なので連結でないことに注意を要する．まず，K 群の定義から明らかに $\mathrm{K}(S^0)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$，$\tilde{\mathrm{K}}(S^0)=\mathbb{Z}$ が成り立つ．したがって (29) の最左辺と最右辺は $d=0$ でも等しい．一方，$[S^0,\mathbb{Z}\times\mathrm{BU}(\infty)]$ は $S^0$ から $\mathbb{Z}$ への写像の（基点なしの）ホモトピー集合に帰着し，これは $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ である[40]．したがって定理 11 が実際に成り立っていることが確かめられる．

次に $\mathrm{K}^{-1}(X)$ とホモトピー集合の関係について簡単に議論しておく．一般に基点付の空間 $Y$ に対して，$\Omega Y$ をループ空間（すなわち $Y$ の基点付ループのなす空間）とする．また，$X$ も基点付の空間とする．$\Omega Y$ と $\Sigma X$ は以下のような関係にあることが知られている[41]：

$$[\Sigma X, Y]_0 = [X, \Omega Y]_0. \tag{30}$$

ここで $[\cdots]_0$ の添え字 0 は基点付であることを明示するために付けた．$X=S^0$ の場合は，(30) を以下のように直観的に理解することができる．まず $\Sigma S^0=S^1$ なので，左辺は $Y$ の基本群 $\pi_1(Y)$ そのものである．右辺については，$S^0$ は 2 点集合なので，基点付の $[X,\Omega Y]_0$ は 1 点から $\Omega Y$ の連結成分への写像である．$Y$ で連続変形できないループは $\Omega Y$ の異なる連結成分に対応するので，$[X,\Omega Y]_0$ は $\pi_1(Y)$ と一致することが分かる．

さて，$\mathrm{U}(k)$ の帰納極限を $\mathrm{U}(\infty)$ とすると，$\mathrm{U}(\infty)$ と $\Omega\mathrm{BU}(\infty)$ はホモトピー同値であることが知られている [1]．さらに，これらは連結である．したがって

$$[\Sigma X, \mathrm{BU}(\infty)] = [X, \mathrm{U}(\infty)]_0. \tag{31}$$

ここで，任意の $X$ に対して $\Sigma X$ は連結であることから，左辺から添え字 0 を省いた．したがって定理 11 から以下が得られる：

$$\mathrm{K}'(\Sigma X) = [X, \mathrm{U}(\infty)]_0. \tag{32}$$

再び $\Sigma X$ が連結であることから，$\mathrm{K}'(\Sigma X)=\tilde{\mathrm{K}}(\Sigma X)$ となる．したがって以下の定理が成り立つ[42]．

**定理 13.**

$$\tilde{\mathrm{K}}^{-1}(X) = [X, \mathrm{U}(\infty)]_0, \tag{33}$$

あるいは同じことだが

$$\mathrm{K}^{-1}(X) = [X, \mathrm{U}(\infty)]_0. \tag{34}$$

この意味で，$\mathrm{U}(\infty)$ は $\mathrm{K}^{-1}(X)$ に関する分類空間と見ることができる．より高次の K 群については，次節で述べる一般の Bott 周期性から求まる．

なお，以上の議論から (29) の左の等号が得られる．実際，$\tilde{\mathrm{K}}(S^d)=\tilde{\mathrm{K}}(\Sigma S^{d-1})=\pi_{d-1}(\mathrm{U}(\infty))$ が成り立つ[43]．

さて，以上の定義・定理と，物理の文献における分類空間の関係について考えよう [12–14]．たとえば $C_0 := \amalg_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{BU}(k)$ が分類空間と呼ばれる．和に $k<0$ も含まれているのは気持ち悪

[40] ここでホモトピー集合の群構造は，$\mathbb{Z}\times\mathrm{BU}(\infty)$ の $\mathbb{Z}$ の群構造から誘導されていると考えることが出来る．

[41] Eckmann-Hilton duality と呼ばれる．

[42] [1] の Proposition 2.1.11.

[43] 厳密には，帰納極限 $\mathrm{U}(\infty)$ から定義された $\pi_{d-1}(\mathrm{U}(\infty))$ と，stable range の $\pi_{d-1}(\mathrm{U}(k))$ で定義された $\pi_{d-1}(\mathrm{U}(\infty))$ は別の概念である．しかし実際には両者は一致する．これは帰納極限とホモトピーが可換なことの表れである [8].

いので，[13] では $C_0 := \amalg_{k\in\mathbb{Z}} \lim_{m\to\infty} \mathrm{U}(2m)/[\mathrm{U}(m+k)\times\mathrm{U}(m-k)]$ と定義されている（lim は帰納極限）．あるいはシンプルに，$C_0 := \mathbb{Z}\times\mathrm{BU}(k)$ と書かれることもある．これらの定義が数学的に一致するかは自明ではないが，いずれにせよ，$C_0$ は $\mathbb{Z}$ でラベルされた可算個の連結成分をもつ．物理的には，占有バンドの数が異なるハミルトニアンの集合の disjoint union をとることに相当すると考えられる．

ここでは，$k\to\infty$ としたときの $\mathbb{Z}\times\mathrm{BU}(k)$，すなわち $\mathbb{Z}\times\mathrm{BU}(\infty)$ を $C_0$ の定義として採用しよう[44]．このとき，定理 11 より

$$\tilde{\mathrm{K}}(S^d) = \pi_d(C_0) \tag{35}$$

が $d\geq 0$ で成り立つ．これがクラス A の K 群について物理で用いられる公式である．ここで右辺は基点付ホモトピーであることに注意．$d\geq 1$ の場合は，$C_0$ のどの連結成分に基点をとってもホモトピー群は同型であり，$\pi_d(C_0) = \pi_d(\mathrm{BU}(\infty))$ である．このとき (35) は定理 11 の (24) そのものである．$d=0$ のときは $\pi_0(C_0)=\mathbb{Z}$ で，(35) が成り立つ．

次に，カイラル対称性があるクラス AIII の場合の分類空間 $C_1$ について考える[45]．[12–14] では，カイラル対称性のもとでハミルトニアンのとりうる形についての考察により，$C_1 := [\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(k)]/\mathrm{U}(k) = \mathrm{U}(k)$ としている．ここで占有バンド数，非占有バンド数はともに $k$ である．この帰納極限をとって $C_1 := \mathrm{U}(\infty)$ としよう[46]．このとき定理 13 より，

$$\tilde{\mathrm{K}}^{-1}(S^d) = \pi_d(C_1) \tag{36}$$

が成り立つ．これはクラス AIII のときに物理で用いられる公式である．

物理の文献では，$d=0$ から出発して，Bott 周期性によって $\tilde{\mathrm{K}}(S^d)$ を求める，という議論を一般の AZ クラスについてすることが多い．

# 6 Bott 周期性

ここで一般の Bott 周期性について簡単に議論する[47]．その際に重要なのが，Clifford 代数を使うと高次の K 群をより低い次数の K 群に帰着させることが出来る，ということである．

まず，ハミルトニアン（すなわち，Grassmann 多様体の元）$\hat{H}(x)$ がカイラル対称性をもつと仮定しよう．すなわち，$\hat{\Gamma}^2=\hat{I}$ を満たすエルミート演算子 $\hat{\Gamma}$ があって，任意の $x\in X$ についてハミルトニアンと反可換である，すなわち $\hat{\Gamma}\hat{H}(x)+\hat{H}(x)\hat{\Gamma}=0$ が成り立つと仮定する[48]．物理的にはこれはクラス AIII を考えていることに相当する．このようなカイラル対称性があるという制約のもとでは，ハミルトニアン $\hat{H}(x)$ の集合は Grassmann 多様体にはならない．[12–14] の議論により，この場合のハミルトニアンの集合は前節で述べた分類空間 $C_1$ になる．このホモトピー集合を，カイラル対称性つきの簡約 K 群と考え，$\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{C}}(X)$ と書くことにする（添え字 $_{\mathrm{C}}$ は，カイラル対称性が課されていることを示している）．

ここで，$x\in X$ に対して $(x,\theta)\in\Sigma X$ という「極座標」をとる．そして $\Sigma X$ のハミルトニアンを $\hat{H}'(x,\theta) := \cos\theta\hat{H}(x)+\sin\theta\hat{\Gamma}$ と定義する．すると $\hat{H}'(x,\theta)$ は，もはや $\hat{\Gamma}$ と反可換ではない，すなわちカイラル対称性をもたない．したがって $\hat{H}'(x,\theta)$ の空間は Grassmann 多様体であり，そのホモトピーは通常の $\tilde{\mathrm{K}}(\Sigma X) =: \tilde{\mathrm{K}}^{-1}(X)$ を与える．

[44]占有バンドの数は $\mathrm{BU}(k)$ の $k$ だが，K 群からはどうせ大きい $k$ のことしか分からないので，$\amalg_k \mathrm{BU}(k)$ をいっそ $\mathbb{Z}\times\mathrm{BU}(\infty)$ で置き換えてしまう，というイメージである．定理 12 の下の議論も参照．

[45]カイラル対称性と K 群の関係については次節で述べる．

[46]ここで，(クラス A のときのように) $k$ についての disjoint union をとらない物理的な理由を，筆者はよく理解していない．もしも $C_1 \overset{?}{=} \mathbb{Z}\times\mathrm{U}(\infty)$ としてしまうと，公式 (36) は数学の定理 13 と一致しなくなる．

[47]本節の議論は非常に適当である．

[48]物理的なカイラル対称性も，ハミルトニアンの波数を変化させないことに注意．

| AZ クラス | K 群 | $d=0$ | $d=1$ | $d=2$ | $d=3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\tilde{\mathrm{K}}(S^d)$ | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\cdots$ |
| AIII | $\tilde{\mathrm{K}}^{-1}(S^d)$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | $\cdots$ |
| A | $\tilde{\mathrm{K}}^{-2}(S^d)$ | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\cdots$ |
| AIII | $\tilde{\mathrm{K}}^{-3}(S^d)$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | | | | | |

Table 1: 複素 AZ クラスの周期表．$S^0$ は 2 点集合と定義されている．縦方向は追加するカイラル対称性の数を表している．

以上より，

$$\tilde{\mathrm{K}}^{-1}(X) = \tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{C}}(X) \tag{37}$$

が分かった．これを suspension 同型と呼ぶ[49]．なお上記では $X$ から $\Sigma X$ への（$n$ を増やして次元を上げる方向の）ハミルトニアンの構成しか議論していないが，同型性を言うには逆方向の構成も必要である[50]．以上をまとめると，reduced suspension によって次元を上げる操作は，もとの空間 $X$ へのカイラル対称性の追加に対応する．

この議論をさらに進めると，一般に $\tilde{\mathrm{K}}(\Sigma^n X)$ は，$n$ 個のカイラル対称性をハミルトニアンに付け加えた場合の K 群 $\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{C}^n}(X)$ と同型になることが分かる．$n$ 個のカイラル対称性は，複素 Clifford 代数 $\mathbb{C}l_n$ によって表現され，周期性 $\mathbb{C}l_{n+2} = \mathbb{C}l_n \otimes \mathbb{C}(2)$ をもつ（ここで $\mathbb{C}(2)$ は $2\times 2$ 行列の全体）．したがって $\tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{C}^n}(X) = \tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{C}^{n+2}}(X)$，すなわち

$$\tilde{\mathrm{K}}^{-(n+2)}(X) = \tilde{\mathrm{K}}^{-n}(X) \tag{38}$$

が成り立つ．これが一般の Bott 周期性である[51]．物理的には，複素 AZ クラスが A と AIII しかないことに対応している．なお，実 AZ クラスに対応する実 K 理論は実 Clifford 代数で記述され，Bott 周期性は周期 8 である[52]．

# 7 トポロジカル絶縁体・超伝導体の周期表

$X = S^d$ の場合を考えよう．$\tilde{\mathrm{K}}^{-d}(S^0) = \tilde{\mathrm{K}}(S^d)$ より，$\tilde{\mathrm{K}}(S^{d+2}) = \tilde{\mathrm{K}}(S^d)$ が成り立つ（実際，結果だけ述べた (29) ではこれが成り立っている）．このように，球面の性質である $\Sigma S^d \simeq S^{d+1}$ によって，Bott 周期性が $S^d$ の次元 $d$ についての周期性になる．これが，トポロジカル絶縁体・超伝導体の周期表において，実空間の次元についての周期性が現れる理由である．

一方で suspension 同型 (37) により，K 群の次数についての周期性はカイラル対称性の数についての周期性，すなわち AZ クラスについての周期性に他ならない．したがって，トポロジカル絶縁体・超伝導体の周期表は，対称性クラスと実空間の次元の両方向に周期性をもつ．表 1 に複素 AZ クラスの周期表を示す．

以上のようにして，$X = S^d$ の場合については，分類空間のホモトピーと Bott 周期性から，10 個すべての AZ クラスについて K 群が求まり，トポロジカル絶縁体・超伝導体の周期表が得られている [12–14]．これは BZ が球面である場合に相当する．なお，実際の物理的な

[49] $\tilde{\mathrm{K}}^{-1}(X) := \tilde{\mathrm{K}}_{\mathrm{C}}(X)$ と定義する流儀もある．この場合は，$\tilde{\mathrm{K}}^{-1}(X) = \tilde{\mathrm{K}}(\Sigma X)$ が suspension 同型である．

[50] おおまかな議論は [17] の Appendix A を参照．Morse 理論を用いるらしい．

[51] $\mathrm{K}^{-n}(\mathrm{pt})$ にも周期性があるので，簡約していない K 群についても Bott 周期性 $\mathrm{K}^{-(n+2)}(X) = \mathrm{K}^{-n}(X)$ が成り立つ．

[52] K 理論の一般化については，たとえば [18] を参照．

BZ はトーラスであるが，$X = T^d$ と $X = S^d$ の場合について，K 群の主要部分（空間次元が $d$ のときに $d$ 次元トポロジカル数を与える部分）は一致する [13][53].

さらに空間群がある場合は非常に複雑であるが，K 群を計算する系統的な手法である Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列（AHSS）を用いて，$d = 3$ のクラス A については厳密に，クラス AIII についても近似的に K 群が求まっている [19]．一般に AHSS から得られる $E_\infty$-page は K 群よりも弱い分類しか与えない（この意味で「近似的」である）が，K 群に比べてどのくらい情報が落ちているかはある完全系列によって決まっており，K 群が厳密に求まる場合もある（この場合は「厳密に求まった」ということまで分かる）.

# 8 K 群と Chern 指標

歴史上最初に発見されたトポロジカル絶縁体は，Chern 絶縁体（整数量子 Hall 効果）である．これはクラス A，$d = 2$ に相当する．このとき Hall 伝導度は Chern 数で与えられることが知られているが [20]，この伝統的な議論と K 群による分類の関係を考えよう．結論から言うと，（空間群など他の対称性がない場合の）**3 次元以下のクラス A については，K 群と Chern 数は同じ情報を与える**.

そこで以下では，K 群とコホモロジーの関係を，Chern 指標の観点から簡単に述べる[54]．本節では簡単のため $X$ は連結とする.

定義や公理は省略するが[55]，Chern 類とは，ベクトル束 $E$ に対して $X$ のコホモロジーの元 $c_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$（$i = 1, 2, \cdots, k := \mathrm{rk}(E)$）を定めるものである．$X$ が可微分多様体の場合は de Rham コホモロジーを通して定義するのが（物理的には）分かりやすい．とくに第一 Chern 類 $c_1(E)$ がゲージ場の曲率（あるいは Berry 曲率）に対応する．$d = 2$ の場合は，これを全空間で積分したもの，すなわち $X$（をホモロジーとみたもの）との内積 $\langle c_1(E), X\rangle \in \mathbb{Z}$ が，いわゆる Chern 数であり，たとえば Hall 伝導度を与える.

偶数次のコホモロジーの全体を $H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Z}) := \oplus_{i\geq 0} H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ と書くことにしよう．一般に，コホモロジーにはカップ積が定義される（de Rham コホモロジーの場合は，微分形式のウェッジ積から誘導される）．これによって $H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Z})$ は環になる．また，ベクトル束のテンソル積から誘導されて，K 群 $\mathrm{K}(X)$ も環になる.

また，これも定義は省略するが，Chern 指標 $\mathrm{ch}(E)$ とは，Chern 類の $\mathbb{Q}$ 係数のある多項式で与えられる．これは $\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}_0(E) + \mathrm{ch}_1(E) + \cdots$ と分解でき，低次の部分を具体的に書くと $\mathrm{ch}_0(E) = \mathrm{rk(E)}$，$\mathrm{ch}_1(E) = c_1(E)$，$\mathrm{ch}_2(E) = (c_1(E)^2 - 2c_2(E))/2$，$\cdots$ といった感じである．$\mathrm{ch}_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{Q})$，$\mathrm{ch}(E) \in H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Q})$ である.

さて，K 群からコホモロジーへの写像を，

$$\mathrm{ch}:\ \mathrm{K}(X) \to H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Q}),\quad [E]-[F] \mapsto \mathrm{ch}(E) - \mathrm{ch}(F) \tag{39}$$

と定義する[56]．これは環として準同型になる．さらに以下の定理が成り立つ[57].

**定理 14.** (39) から誘導される

$$\mathrm{ch}:\ \mathrm{K}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Q}) \tag{40}$$

[53] 一致しない部分は「弱いトポロジカル絶縁体」に対応すると解釈できる．8 節の最後の議論も参照.

[54] 主に [3,6,7] を参考にした.

[55] 詳しくは [9] などにある.

[56] 一般に $\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F)$ が成り立つので，この写像は well-defined である．また，$\mathrm{ch}(E)$ は同値類 $[E]$ だけに依存する.

[57] [7] の Theorem 4．また [3] の (7.10).

は，環としての同型写像である．さらに，もし $H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Z})$ のねじれ部分[58]が $0$ ならば，$\mathrm{K}(X)$ のねじれ部分も $0$ である．

つまり K 群と（偶数次の）コホモロジーは似た情報をもっていることになる．では両者は等価かというと，もちろんそうではない．$\mathrm{K}(X)$ がねじれ部分を含む場合，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0$ より，ねじれ部分は (40) の左辺からは消えてしまう．この意味で同型 (40) からは，ねじれ部分に関しては何も言えない．一方で自由な（ねじれのない）部分については，両者は同じ情報をもつ．さらに定理 14 の後半から，もし $H^{\mathrm{even}}(X,\mathbb{Z})$ がねじれ部分をもたなければ，情報は落ちていないことが分かる．

$d\leq 3$ の場合はもっと強いことが言える．まず，この場合は $\mathrm{ch}=\mathrm{ch}_0+\mathrm{ch}_1$ となり，$\mathrm{ch}(E)\in H^0(X,\mathbb{Z})\oplus H^2(X,\mathbb{Z})$ となる．そして，定理 14 の同型が $\mathbb{Z}$ 上で成り立つ[59]．

**定理 15.** $d\leq 3$ のとき，以下は同型写像である．

$$\mathrm{ch}:\ \mathrm{K}(X)\ \to\ H^0(X,\mathbb{Z})\oplus H^2(X,\mathbb{Z}). \tag{41}$$

ここで，$\mathrm{ch}_0(E)=\mathrm{rk}(E)$，$\mathrm{ch}_1(E)=c_1(E)$ であった．$[E_k]-[I^l]\in\mathrm{K}(X)$ とすると（$E_k$ のランクは $k$），(41) は，$\mathrm{ch}_0([E_k]-[I^l])=k-l\in\mathbb{Z}\ (=H^0(X,\mathbb{Z}))$，$\mathrm{ch}_1([E_k]-[I^l])=c_1(E_k)$ となる（自明束に対して $c_1(I^l)=0$ となることを使った）．これを，1 節で議論した K 群の分解 (8)，すなわち $\mathrm{K}(X)=H^0(X,\mathbb{Z})\oplus\mathrm{K}'(X)$ と見比べると，

$$\mathrm{ch}_1:\ \mathrm{K}'(X)\ \to\ H^2(X,\mathbb{Z}),\ \ [E_k]-[I^k]\mapsto c_1(E_k) \tag{42}$$

という同型対応が分かる．したがって $\mathrm{K}'(X)$ が第一 Chern 類に対応している[60]．以上の議論は，2 節の定理 6 の下の議論に関連して，$\mathrm{K}'(X)$ の意味を明確に表していると言える．なお，いまは $X$ が連結な場合を考えているので，$\mathrm{K}'(X)=\tilde{\mathrm{K}}(X)$ である．

$d=0,1$ の場合はそもそも $\mathrm{ch}_1(E)=0$，$H^2(X,\mathbb{Z})=0$ なので，$\tilde{\mathrm{K}}(X)=0$ である．とくに $\tilde{\mathrm{K}}(S^1)=0$ であり，表 1 と整合している．

$d=2$ の場合は，たとえば球面については $H^2(S^2,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ なので，$\tilde{\mathrm{K}}(S^2)=\mathbb{Z}$ である．これも表 1 と整合している．表 1 のクラス A，$d=2$ の $\mathbb{Z}$ は Chern 数そのものであると言える．また，トーラスについては $H^2(T^2,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ なので，$\tilde{\mathrm{K}}(T^2)=\mathbb{Z}$ が分かる．これが本来の整数量子ホール効果を表している．

$d=3$ については，$H^2(S^3,\mathbb{Z})=0$ なので $\tilde{\mathrm{K}}(S^3)=0$ であり，これも表 1 と整合している．一方トーラスについては，$H^2(T^3,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ なので $\tilde{\mathrm{K}}(T^3)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ であり，球面 $S^3$ の場合とは異なる．これは物理的には，BZ がトーラスの場合は，3 方向に「弱い Chern 絶縁体」が存在しうることを表していると解釈できる．3 次元に固有のトポロジーを表しているのは $\tilde{\mathrm{K}}(S^3)=0$ であると言える．

**謝辞**　本稿の 6 節と 7 節の大部分は 2018 年 2 月に本郷で行われた塩崎謙さん（理研）のレクチャーに，5 節の一部はその後にした議論に基づいています．また，塩崎さんにはこの原稿について多くの貴重なご意見をいただきました．筆者の低レベルな質問に辛抱強く付き合ってくださった塩崎さんに感謝いたします．

[58] 有限位数の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の部分．

[59] [21] の Proposition 2.1 (ii) の一行目．ただしこの論文では，本稿の $\mathrm{ch}_i$ を $\mathrm{ch}_{2i}$ と書いているので注意．また，AHSS の計算からも直接 $\mathrm{K}(X)=H^0(X,\mathbb{Z})\oplus H^2(X,\mathbb{Z})$，$\mathrm{K}^{-1}(X)=H^1(X,\mathbb{Z})$ が求まる [22]．

[60] $c_1(E\oplus F)=c_1(E)+c_1(F)$ が成り立つので，$c_1(E)$ は $[E]$ だけに依存する．全 Chern 類 $c(E):=1+c_1(E)+c_2(E)+\cdots$ については $c(E\oplus F)=c(E)c(F)$（積はカップ積）が成り立つので，これも $[E]$ だけに依存する．

# References


[1] M. Atiyah, "*K-theory*", (Benjamin, 1967).

[2] M. Karoubi, "*K-theory: An Introduction*", (Springer, 2008).

[3] K. Olsen and R. J. Szabo, "Constructing D-Branes from K-Theory", Adv. Theor. Math. Phys. **3** 889-1025 (1999). https://arxiv.org/abs/hep-th/9907140

[4] D. Husemoeller, "*Fibre Bundles*" (Springer, 1993).

[5] C. Nash, "*Differential Topology and Quantum Field Theory*" (Academic Press, 1991).

[6] W. Jiang, "A mini-introduction to topological K-theory", http://www.ulb.ac.be/sciences/ptm/pmif/Rencontres/ModaveII/ktheory.pdf

[7] V. Braun, "K-theory and exceptional holonomy in string theory", Ph.D Thasis, http://www.sas.upenn.edu/~vbraun/pub/PhD.pdf

[8] 服部晶夫，佐藤肇，森田茂之,『多様体のトポロジー』（朝倉書店，2016）.

[9] M. Nakahara, "*Geometry, Topology, and Physics*" (Hilger, Bristol, 2003). 和訳：中原幹夫，佐久間一浩（翻訳）,『理論物理学のための幾何学とトポロジー』（ピアソンエデュケーション，2000）.

[10] 玉木大,「ファイバー束とホモトピー I」 http://pantodon.shinshu-u.ac.jp/downloadables/notes/bundle.pdf

[11] 野村健太郎,『トポロジカル絶縁体・超伝導体』（丸善，2016）.

[12] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, "Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions", Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008). https://arxiv.org/abs/0803.2786

[13] A. Kitaev, "Periodic table for topological insulators and superconductors", AIP Conference Proceedings **1134**, 22 (2009). https://arxiv.org/abs/0901.2686

[14] X.-G. Wen, "Symmetry protected topological phases in non-interacting fermion systems ", https://arxiv.org/abs/1111.6341

[15] X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, and X.-G. Wen, "Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group", Phys. Rev. B **87**, 155114 (2013). https://arxiv.org/abs/1106.4772

[16] J. E. Moore, Y. Ran, X.-G. Wen, "Topological surface states in three-dimensional magnetic insulators", Phys. Rev. Lett. **101**, 186805 (2008). https://arxiv.org/abs/0804.4527

[17] J. C. Y. Teo and C. L. Kane, "Topological Defects and Gapless Modes in Insulators and Superconductors", Phys. Rev. B **82**, 115120 (2010). https://arxiv.org/abs/1006.0690

[18] K. Gomi, "Freed-Moore K-theory" https://arxiv.org/abs/1705.09134

[19] K. Shiozaki, M. Sato, K. Gomi, "Atiyah-Hirzebruch Spectral Sequence in Band Topology: General Formalism and Topological Invariants for 230 Space Groups". https://arxiv.org/abs/1802.06694

[20] M. Kohmoto, "Topological invariant and the quantization of the Hall conductance", Ann. Phys. **160**, 343 (1985).

[21] M. Matthey, "Mapping the homology of a group to the $K$-theory of its $C^*$-algebra", Illinois J. Math. **46**, 953-977 (2002).

[22] K. Shiozaki, Private communication.